2.2 考虑过原点的线性回归模型

$$y_i=\beta_1 x_i+\varepsilon_i,\quad i=1,2,\cdots,n$$

误差 ε_1，ε_2，…，ε_n 仍满足基本假定。求 β_1 的最小二乘估计。

基本假定：$E(\varepsilon_i)=0$，$Var(\varepsilon_i)=\sigma^2$. $Var(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0.\ i\neq j$

残差平方和 $Q(\beta_1)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\beta_1 x_i)^2$

$$\frac{dQ}{d\beta_1}=-2\sum_{i=1}^{n}x_i(y_i-\beta_1 x_i)=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i y_i-\beta_1\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0.$$

解得 $\hat{\beta}_1=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$

2.5 证明 $\hat{\beta}_0$ 是 β_0 的无偏估计。(x不是随机变量，y和ε是随机变量)

对于一元线性回归模型 $y_i=\beta_0+\beta_1 x_i+\varepsilon_i$，最小二乘估计

$$\hat{\beta}_1=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{L_{xy}}{L_{xx}},\quad \hat{\beta}_0=\bar{y}-\hat{\beta}_1\bar{x}.$$

利用恒等式 $\sum(x_i-\bar{x})\bar{y}=\bar{y}\sum(x_i-\bar{x})=0$，$\hat{\beta}_1=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$

① 证明 $E(\hat{\beta}_1)=\beta_1$.

$$E(\hat{\beta}_1)=\frac{1}{L_{xx}}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})E(y_i)=\frac{1}{L_{xx}}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(\beta_0+\beta_1 x_i)$$

$$=\frac{1}{L_{xx}}\Big[\beta_0\underbrace{\sum(x_i-\bar{x})}_{=0}+\beta_1\underline{\sum(x_i-\bar{x})x_i}\Big]$$

$$\sum(x_i-\bar{x})x_i=\sum(x_i-\bar{x})(x_i-\bar{x})=L_{xx}$$

$$=\frac{1}{L_{xx}}\times\beta_1\times L_{xx}=\beta_1$$

② 证明 $E(\hat{\beta}_0)=\beta_0$.

$$E(\bar{y})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(y_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\beta_0+\beta_1 x_i)=\beta_0+\beta_1\bar{x}.$$

$$E(\hat{\beta}_0)=E(\bar{y})-\bar{x}E(\hat{\beta}_1)=\beta_0+\beta_1\bar{x}-\beta_1\bar{x}=\beta_0$$

2.6 证明式 (2.42) $\operatorname{var}(\hat{\beta}_0)=\left[\frac{1}{n}+\frac{(\bar{x})^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\right]\sigma^2$ 成立。

准备：① 估计量表达式 $\hat{\beta}_0=\bar{y}-\hat{\beta}_1\bar{x}$, $\hat{\beta}_1=\frac{\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})y_i}{L_{xx}}$, $L_{xx}=\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2$

② 基本假定：$Var(\varepsilon_i)=\sigma^2$, $Cov(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0$, $i\neq j$

因为 $\hat{\beta}_0=\bar{y}-\hat{\beta}_1\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i-\bar{x}\cdot\frac{\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})y_i}{L_{xx}}$

$$=\sum_{i=1}^n\left[\frac{1}{n}-\frac{\bar{x}(x_i-\bar{x})}{L_{xx}}\right]y_i$$

另外，记 $a_i=\frac{1}{n}-\frac{\bar{x}(x_i-\bar{x})}{L_{xx}}$，即 $\hat{\beta}_0=\sum_{i=1}^n a_i y_i$

由于 $y_1,\cdots,y_n$ 不相关且方差都等于 σ^2，$Var(\hat{\beta}_0)=\sum_{i=1}^n a_i^2\,Var(y_i)=\sigma^2\sum_{i=1}^n a_i^2$

展开 $\sum a_i^2$，$\sum_{i=1}^n a_i^2=\sum_{i=1}^n\left[\frac{1}{n}-\frac{\bar{x}(x_i-\bar{x})}{L_{xx}}\right]^2$

$$=\sum_{i=1}^n\frac{1}{n^2}-2\sum_{i=1}^n\frac{1}{n}\frac{\bar{x}(x_i-\bar{x})}{L_{xx}}+\sum_{i=1}^n\frac{\bar{x}^2(x_i-\bar{x})^2}{L_{xx}^2}$$

$$=n\times\frac{1}{n^2}-\frac{2\bar{x}}{n\cdot L_{xx}}\underbrace{\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})}_{=0}+\frac{\bar{x}^2}{L_{xx}^2}\underbrace{\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2}_{L_{xx}}$$

$$=\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{L_{xx}}$$

$$=\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2}$$

因此，$Var(\hat{\beta}_0)=\left[\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2}\right]\sigma^2$. 证毕.

另一种方法：

需要先证三个结论：① $Var(\bar{y})=Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n Var(y_i)=\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$

② $Var(\hat{\beta}_1)=\frac{\sigma^2}{L_{xx}}$.

$\hat{\beta}_1=\frac{\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})y_i}{L_{xx}}=\sum_{i=1}^n c_i y_i$，其中 $c_i=\frac{x_i-\bar{x}}{L_{xx}}$

$Var(\hat{\beta}_1)=\sum_{i=1}^n c_i^2\,Var(y_i)=\sigma^2\sum_{i=1}^n c_i^2=\sigma^2\sum_{i=1}^n\frac{(x_i-\bar{x})^2}{L_{xx}}$

$$=\frac{\sigma^2}{L_{xx}^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2=\frac{\sigma^2}{L_{xx}^2}\times L_{xx}=\frac{\sigma^2}{L_{xx}}$$

③ $Cov(\bar{y},\hat{\beta}_1)=0$

$\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i$，$\hat{\beta}_1=\sum_{j=1}^n\frac{x_j-\bar{x}}{L_{xx}}y_j$

$$\mathrm{Cov}(\bar{y}, \hat{\beta}_1) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{x_j - \bar{x}}{L_{xx}} \mathrm{Cov}(y_i, y_j)$$

根据基本假定，$\mathrm{Cov}(y_i, y_j) = \sigma^2$，当 $i=j$，否则为 0.

因此双重求和仅保留 $i=j$ 的项.

$$\mathrm{Cov}(\bar{y}, \hat{\beta}_1) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{x_j - \bar{x}}{L_{xx}} \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n L_{xx}} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = 0$$

进而，$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_0) = \mathrm{Var}(\bar{y} - \bar{x}\hat{\beta}_1) = \mathrm{Var}(\bar{y}) + \bar{x}^2 \mathrm{Var}(\hat{\beta}_1) - 2\bar{x}\,\mathrm{Cov}(\bar{y}, \hat{\beta}_1)$

$$= \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\bar{x}^2 \sigma^2}{L_{xx}} = \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{L_{xx}}\right] \sigma^2$$

2.8 验证三种检验的关系：

(1) $t=\dfrac{\hat\beta_1\sqrt{L_{xx}}}{\hat\sigma}=\dfrac{\sqrt{n-2}\,r}{\sqrt{1-r^2}}$

(2) $F=\dfrac{SSR/1}{SSE/(n-2)}=\dfrac{\hat\beta_1^2\cdot L_{xx}}{\hat\sigma^2}=t^2$

回顾：$\hat\beta_1=\dfrac{L_{xy}}{L_{xx}}$，$r=\dfrac{L_{xy}}{\sqrt{L_{xx}L_{yy}}}$，$SSR=\hat\beta_1^2L_{xx}=\dfrac{L_{xy}^2}{L_{xx}}$

$SSR=\sum_{i=1}^{n}(\hat y_i-\bar y)^2$，$\hat y_i=\hat\beta_0+\hat\beta_1x_i$，$\hat\beta_0=\bar y-\hat\beta_1\bar x$.

$\hat y_i=(\bar y-\hat\beta_1\bar x)+\hat\beta_1x_i \Rightarrow \hat y_i-\bar y=\hat\beta_1(\hat x_i-\bar x)$

$SSR=\sum_{i=1}^{n}(\hat y_i-\bar y)^2=\sum_{i=1}^{n}[\hat\beta_1(\hat x_i-\bar x)]^2=\hat\beta_1^2L_{xx}$

$SSE=L_{yy}-SSR=L_{yy}-\dfrac{L_{xy}^2}{L_{xx}}=L_{yy}(1-\dfrac{L_{xy}^2}{L_{xx}L_{yy}})=L_{yy}(1-r^2)$

(2.52)

(1) $t=\dfrac{\hat\beta_1\sqrt{L_{xx}}}{\hat\sigma}$，又有 $\hat\sigma^2=\dfrac{SSE}{n-2}=\dfrac{L_{yy}(1-r^2)}{n-2}$

$t=\dfrac{L_{xy}}{L_{xx}}\cdot\sqrt{L_{xx}}\cdot\dfrac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{L_{yy}(1-r^2)}}=\sqrt{n-2}\cdot\dfrac{\overbrace{\dfrac{L_{xy}}{\sqrt{L_{xx}L_{yy}}}}^{r}}{\sqrt{1-r^2}}=\dfrac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$

(2) $F=\dfrac{SSR/1}{SSE/n-2}$，由 $SSR=\hat\beta_1^2L_{xx}$，$\hat\sigma^2=SSE/n-2$

$=\dfrac{\hat\beta_1^2L_{xx}}{\hat\sigma^2}=(\dfrac{\hat\beta_1\sqrt{L_{xx}}}{\hat\sigma})^2=t^2$

结论：在一元线性回归中，t检验和F检验完全等价.

2.9 验证式 (2.63)：

$$\mathrm{var}(e_i)=\left[1-\frac{1}{n}-\frac{(x_i-\bar{x})^2}{L_{xx}}\right]\sigma^2$$

因为 $\hat\beta_0=\bar y-\hat\beta_1\bar x$，所以拟合值

$$\hat y_i=\hat\beta_0+\hat\beta_1 x_i=\bar y-\hat\beta_1\bar x+\hat\beta_1 x_i=\bar y+\hat\beta_1(x_i-\bar x)$$

因此 $e_i=y_i-\hat y_i=y_i-\bar y-\hat\beta_1(x_i-\bar x)$

单个索引

① $y_i-\bar y=y_i-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}y_j=(1-\frac{1}{n})y_i-\frac{1}{n}\sum_{j\neq i}y_j$

$$\mathrm{Var}(y_i-\bar y)=(1-\frac{1}{n})^2\mathrm{Var}(y_i)+\frac{1}{n^2}\cdot(n-1)\cdot\sigma^2$$

$$=(1-\frac{1}{n})^2\cdot\sigma^2+\frac{n-1}{n^2}\sigma^2$$

$$=\frac{n-1}{n}\sigma^2$$

② $\mathrm{Var}[\hat\beta_1(x_i-\bar x)]=(x_i-\bar x)^2\mathrm{Var}(\hat\beta_1)=(x_i-\bar x)^2\frac{\sigma^2}{L_{xx}}=\frac{(x_i-\bar x)^2}{L_{xx}}\sigma^2$

③ $\mathrm{Cov}(y_i-\bar y,\hat\beta_1(x_i-\bar x))=(x_i-\bar x)\mathrm{Cov}(y_i-\bar y,\hat\beta_1)=\frac{(x_i-\bar x)^2}{L_{xx}}\sigma^2$

$=\mathrm{Cov}(y_i,\hat\beta_1)-\mathrm{Cov}(\bar y,\hat\beta_1)$ $=0$ (2.6的结论③)

$=\mathrm{Cov}(y_i,\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j-\bar x}{L_{xx}}y_j)=\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j-\bar x}{L_{xx}}\mathrm{Cov}(y_i,y_j)$

$=\frac{x_i-\bar x}{L_{xx}}\sigma^2$ (只有$i=j$项非零，其余$n-1$项全为0)

合并可得 $\mathrm{Var}(e_i)=(1-\frac{1}{n})\sigma^2+\frac{(x_i-\bar x)^2}{L_{xx}}\sigma^2-2\frac{(x_i-\bar x)^2}{L_{xx}}\sigma^2$

$$=\left[1-\frac{1}{n}-\frac{(x_i-\bar x)^2}{L_{xx}}\right]\sigma^2$$

2.10 用 2.9 题证明 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$ 是 σ^2 的无偏估计。

$\hat{\sigma}^2=\frac{SSE}{n-2}$，$E(\hat{\sigma}^2)=E(\frac{SSE}{n-2})$

所以，$E(SSE)=E[\sum_{i=1}^{n}e_i^2]=Var(\sum_{i=1}^{n}e_i)+\boxed{[E(e_i)]^2}$

(公式 $E(X^2)=Var(X)+[EX]^2$)

$E(e_i)=E(y_i)-E(\hat{y}_i)=(\beta_0+\beta_1 x_i)-(\beta_0+\beta_1 x_i)=0$

其中，$E(\hat{y}_i)=E(\hat{\beta}_0)+E(\hat{\beta}_1)x_i=\beta_0+\beta_1 x_i$，因为$\beta_0$和$\beta_1$均为无偏估计.

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[1-\frac{1}{n}-\frac{(x_i-\bar{x})^2}{L_{xx}}\right]\sigma^2$$

$$=\sigma^2\sum_{i=1}^{n}\left[1-\frac{1}{n}-\frac{(x_i-\bar{x})^2}{L_{xx}}\right]$$

$$=\sigma^2\left[n-1-\frac{L_{xx}}{L_{xx}}\right]$$

$$=(n-2)\sigma^2$$

$E(\hat{\sigma}^2)=\frac{(n-2)\sigma^2}{n-2}=\sigma^2$. 所以是无偏估计量.

2.11 验证决定系数 r^2 与 F 值之间的关系式

$$r^2=\frac{F}{F+n-2}$$

以上表达式说明 r^2 与 F 值是等价的，那么我们为什么要分别引入这两个统计量，而不是只使用其中的一个？

$$r^2=\frac{SSR}{SST}=\frac{SSR}{SSR+SSE}, \quad F=\frac{SSR/1}{SSE/n-2}=\frac{(n-2)SSR}{SSE}$$

将 $F=\frac{SSR/1}{SSE/n-2}$ 代入 $r^2=\frac{F}{F+n-2}$ 中可得：

$$F+n-2=\frac{(n-2)SSR}{SSE}+\frac{(n-2)SSE}{SSE}=\frac{(n-2)(SSR+SSE)}{SSE}$$

$$\frac{F}{F+n-2}=\frac{(n-2)SSR}{SSE}\cdot\frac{SSE}{(n-2)SST}=\frac{SSR}{SST}=r^2$$

2.12 如果把自变量观测值都乘以 2，回归参数的最小二乘估计 $\hat{\beta}_0$ 和 $\hat{\beta}_1$ 会发生什么变化？如果把自变量观测值都加上 2，回归参数的最小二乘估计 $\hat{\beta}_0$ 和 $\hat{\beta}_1$ 会发生什么

① 自变量乘2. $x_i' = 2x_i \Rightarrow$ 均值 $\bar{x}' = 2\bar{x}$，离差 $x_i' - \bar{x}' = 2x_i - 2\bar{x} = 2(x_i - \bar{x})$

$$L_{xx}' = \sum(x_i' - \bar{x}')^2 = \sum[2(x_i - \bar{x})]^2 = 4L_{xx}$$

$$L_{xy}' = \sum(x_i' - \bar{x}')(y_i - \bar{y}) = 2L_{xy}$$

$$\hat{\beta}_1' = \frac{L_{xy}'}{L_{xx}'} = \frac{2L_{xy}}{4L_{xx}} = \frac{1}{2}\hat{\beta}_1$$

$$\hat{\beta}_0' = \bar{y} - \hat{\beta}_1'\bar{x}' = \bar{y} - \frac{1}{2}\hat{\beta}_1 \cdot 2\bar{x} = \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x} = \hat{\beta}_0$$

$\Rightarrow$ 斜率变为原来的一半，截距不变.

② 自变量加2. $x_i' = x_i + 2 \Rightarrow$ 均值 $\bar{x}' = \bar{x} + 2$，离差 $x_i' - \bar{x}' = x_i - \bar{x}$

$$L_{xx}' = L_{xx}, \quad L_{xy}' = L_{xy}$$

$$\hat{\beta}_1' = \frac{L_{xx}'}{L_{xy}'} = \frac{L_{xx}}{L_{xy}} = \hat{\beta}_1.$$

$$\hat{\beta}_0' = \bar{y} - \hat{\beta}_1'\bar{x}' = \bar{y} - \hat{\beta}_1(\bar{x} + 2) = \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x} - 2\hat{\beta}_1$$

$\Rightarrow$ 斜率不变，截距减少 $2\hat{\beta}_1$.

3.3 证明 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n-p-1}SSE$ 是误差项方差 σ^2 的无偏估计。 补充：$H=X(X'X)^{-1}X'$

二次型期望公式. $\forall$对称矩阵A和随机向量 y

$$E(y'Ay)=tr(A\,var(y))+[E(y)]'A[E(y)]$$

①将SSE写成二次型 (帽子矩阵H本身对称幂等, $I-H$ 自然继承)

残差向量 $e=(I-H)y$, 且 $I-H$ 是对称幂等矩阵. $(I-H)^2=I-H$

$$SSE=e'e=y'(I-H)'(I-H)y=y'(I-H)y$$

②代入二次型期望公式

$$E(y)=X\beta,\quad Var(y)=\sigma^2 I_n.$$

$$E(SSE)=E(y'(I-H)y)=tr[(I-H)\cdot\sigma^2 I_n]+(X\beta)'(I-H)(X\beta)$$

③后续计算

$$(I-H)X=X-X\overbrace{(X'X)^{-1}X'X}^{I_{p+1}}=X-X=0$$

故 $(X\beta)'(I-H)(X\beta)=0$ $\quad tr(H)=rank(X)=$回归方程参数个数$=p+1$

$$tr(I-H)=tr(I_n)-tr(H)=n-(p+1)$$ 反映了模型用掉多少自由度.

$tr(H)=tr[X(X'X)^{-1}X']$ $\quad X_{n\times(p+1)}=$

$$=tr[(X'X)^{-1}XX']=tr(I_{p+1})=p+1$$

因此, $E(SSE)=\sigma^2(n-p-1)$

$$E(\hat{\sigma}^2)=E\left[\frac{SSE}{n-p-1}\right]=\sigma^2.\ \Rightarrow 无偏估计量.$$

3.7 验证式（3.52）

$$\hat{\beta}_j^* = \frac{\sqrt{L_{jj}}}{\sqrt{L_{yy}}}\hat{\beta}_j, \quad j=1,2,\cdots,p$$

标准化回归系数公式 $\hat{\beta}_j^* = \frac{\sqrt{L_{jj}}}{\sqrt{L_{yy}}}\hat{\beta}_j$

准备：中心化回归方程（删 β_0） $\boxed{y_i - \bar{y} = \sum_{j=1}^{p} \beta_j (x_{ij} - \bar{x}_j) + \varepsilon_i}$

标准化回归方程 $\boxed{y_i^* = \sum_{j=1}^{p} \beta_j^* x_{ij}^* + \varepsilon_i^*. \quad ①}$

将①还原到原始变量 $\frac{y_i - \bar{y}}{\sqrt{L_{yy}}} = \sum_{j=1}^{p} \beta_j^* \cdot \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{\sqrt{L_{jj}}} + \varepsilon_i^*$

两边同乘 $\sqrt{L_{yy}}$，$\boxed{y_i - \bar{y} = \sum_{j=1}^{p} \beta_j^* \cdot \frac{\sqrt{L_{yy}}}{\sqrt{L_{jj}}}(x_{ij} - \bar{x}_j) + \sqrt{L_{yy}}\, \varepsilon_i^*}$

系数完全相同. 由最小二乘解的唯一性.

3.8 利用式（3.60）证明式（3.61）成立，即

$$r_{12;3}=\frac{r_{12}-r_{13}r_{23}}{\sqrt{(1-r_{13}^2)(1-r_{23}^2)}}$$

偏相关系数的代数余子式表示，式(3.60)，$r_{12;3,\cdots,p}=\dfrac{-\Delta_{12}}{\sqrt{\Delta_{11}\cdot\Delta_{12}}}$

其中 $\Delta_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 是相关阵i行j列的代数余子式，M_{ij} 为余子式.

三变量相关阵 $R=\begin{pmatrix}1 & r_{12} & r_{13}\\ r_{12} & 1 & r_{23}\\ r_{13} & r_{23} & 1\end{pmatrix}$

$$\Delta_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & r_{23}\\ r_{23} & 1\end{vmatrix}=1-r_{23}^2$$

$$\Delta_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & r_{13}\\ r_{13} & 1\end{vmatrix}=1-r_{13}^2$$

$$\Delta_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}r_{12} & r_{23}\\ r_{13} & 1\end{vmatrix}=-(r_{12}-r_{13}r_{23})$$

代入公式(3.60)，$r_{12;3}=\dfrac{-\Delta_{12}}{\sqrt{\Delta_{11}\Delta_{12}}}=\dfrac{r_{12}-r_{13}r_{23}}{\sqrt{(1-r_{23}^2)(1-r_{13}^2)}}$

(4.5)

$$\begin{cases}\hat{\beta}_{0w}=y_w-\hat{\beta}_{1w}x_w \\ \hat{\beta}_{1w}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}w_i(x_i-x_w)(y_i-y_w)}{\sum_{i=1}^{n}w_i(x_i-x_w)^2}\end{cases} \tag{4.5}$$

加权均值的定义 $\bar{x}_w=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}w_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}w_i}$

一元WLS模型 $y_i=\beta_0+\beta_1x_i+\varepsilon_i$，$Var(\varepsilon_i)=\sigma^2/w_i$

$$Q(\beta_0,\beta_1)=\sum_{i=1}^{n}w_i(y_i-\beta_0-\beta_1x_i)^2$$

求偏导 $\dfrac{\partial Q}{\partial\beta_0}=-2\sum_{i=1}^{n}w_i(y_i-\beta_0-\beta_1x_i)=0$

整理，得 $\sum w_iy_i=\beta_0\sum w_i+\beta_1\sum w_ix_i$ ①

$$\frac{\partial Q}{\partial\beta_1}=-2\sum_{i=1}^{n}w_ix_i(y_i-\beta_0-\beta_1x_i)=0$$

整理，得 $\sum w_ix_iy_i=\beta_0\sum w_ix_i+\beta_1\sum w_ix_i^2$ ②

定义加权样本均值 $\bar{x}_w=\dfrac{\sum w_ix_i}{\sum w_i}$，$\bar{y}_w=\dfrac{\sum w_iy_i}{\sum w_i}$

由①式两边除以$\sum w_i$，$\boxed{\bar{y}_w=\beta_0+\beta_1\bar{x}_w \Rightarrow \hat{\beta}_0=\bar{y}_w-\hat{\beta}_1\bar{x}_w}$

将 $\hat{\beta}_0=\bar{y}_w-\beta_1\bar{x}_w$ 代入②可得

$$\sum w_ix_iy_i=(\bar{y}_w-\beta_1\bar{x}_w)\sum w_ix_i+\beta_1\sum w_ix_i^2$$

$$\sum w_ix_iy_i-\bar{y}_w\sum w_ix_i=\beta_1\left[\sum w_ix_i^2-\bar{x}_w\sum w_ix_i\right]$$

根据定义式，$\sum w_ix_i=\bar{x}_w\sum w_i$

$$左端=\sum w_ix_iy_i-\bar{y}_w\bar{x}_w\sum w_i=\sum w_ix_iy_i-\sum w_i\bar{x}_w\bar{y}_w$$

$$=\sum w_i(x_iy_i-\bar{x}_w\bar{y}_w)=\sum w_i(x_i-\bar{x}_w)(y_i-\bar{y}_w)$$

$$右端括号=w_ix_i^2-\bar{x}_w^2\sum w_i=\sum w_i(x_i^2-\bar{x}_w^2)=\sum w_i(x_i-\bar{x}_w)^2$$

最终得到 $\boxed{\hat{\beta}_1=\dfrac{\sum w_i(x_i-\bar{x}_w)(y_i-\bar{y}_w)}{\sum w_i(x_i-\bar{x}_w)^2}}$

中间使用了加权均值恒等式 $\sum w_ix_i=\bar{x}_w\sum w_i$，$\sum w_iy_i=\bar{y}_w\sum w_i$