



第四章

非平稳序列的确定性分析



本章结构

- 时间序列的分解
- 确定性因素分解
- 趋势分析
- 季节效应分析
- 综合分析
- X-11过程



4.1 时间序列的分解

- Wold分解定理
- Cramer分解定理



Wold分解定理 (1938)

- 对于任何一个离散平稳过程 $\{x_t\}$ 它都可以分解为两个不相关的平稳序列之和，其中一个为确定性的，另一个为随机性的，不妨记作

$$x_t = V_t + \xi_t$$

其中： $\{V_t\}$ 为确定性序列， $\{\xi_t\}$ 为随机序列， $\xi_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j \varepsilon_{t-j}$

它们需要满足如下条件

$$(1) \quad \varphi_0 = 1, \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j^2 < \infty \quad (2) \quad \{\varepsilon_t\} \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

$$(3) \quad E(V_t, \varepsilon_s) = 0, \quad \forall t \neq s$$



确定性序列与随机序列的定义

- 对任意序列 $\{y_t\}$ 而言，令 y_t 关于 q 期之前的序列值作线性回归

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-q} + a_2 y_{t-q-1} + \cdots + U_t$$

其中 $\{U_t\}$ 为回归残差序列， $Var(U_t) = \tau_q^2$ 。

- 确定性序列，若 $\lim_{q \rightarrow \infty} \tau_q^2 = 0$
- 随机序列，若 $\lim_{q \rightarrow \infty} \tau_q^2 = Var(y_t)$



ARMA模型分解

$$x_t = \mu + \frac{\psi(B)}{\phi(B)} \varepsilon_t$$

确定性序列

随机序列

Cramer分解定理 (1961)

- 任何一个时间序列 $\{x_t\}$ 都可以分解为两部分的叠加：其中一部分是由多项式决定的确定性趋势成分，另一部分是平稳的零均值误差成分，即

$$x_t = \mu_t + \varepsilon_t$$

$$\sum_{j=0}^d \beta_j t^j$$

确定性影响

$$\Psi(B)a_t$$

随机性影响



对两个分解定理的理解

- **Wold**分解定理说明任何平稳序列都可以分解为确定性序列和随机序列之和。它是现代时间序列分析理论的灵魂，是构造ARMA模型拟合平稳序列的理论基础。
- **Cramer** 分解定理是Wold分解定理的理论推广，它说明任何一个序列的波动都可以视为同时受到了确定性影响和随机性影响的综合作用。平稳序列要求这两方面的影响都是稳定的，而非平稳序列产生的机理就在于它所受到的这两方面的影响至少有一方面是不稳定的。



4.2 确定性因素分解

- 传统的因素分解

- 长期趋势
- 循环波动
- 季节性变化
- 随机波动

- 现在的因素分解

- 长期趋势波动
- 季节性变化
- 随机波动



确定性时序分析的目的

- 克服其它因素的影响，单纯测度出某一个确定性因素对序列的影响
- 推断出各种确定性因素彼此之间的相互作用关系及它们对序列的综合影响



4.3趋势分析

- 目的

- 有些时间序列具有非常显著的趋势，我们分析的目的就是要找到序列中的这种趋势，并利用这种趋势对序列的发展作出合理的预测

- 常用方法

- 趋势拟合法
- 平滑法



趋势拟合法

- 趋势拟合法就是把时间作为自变量，相应的序列观察值作为因变量，建立序列值随时间变化的回归模型的方法
- 分类
 - 线性拟合
 - 非线性拟合

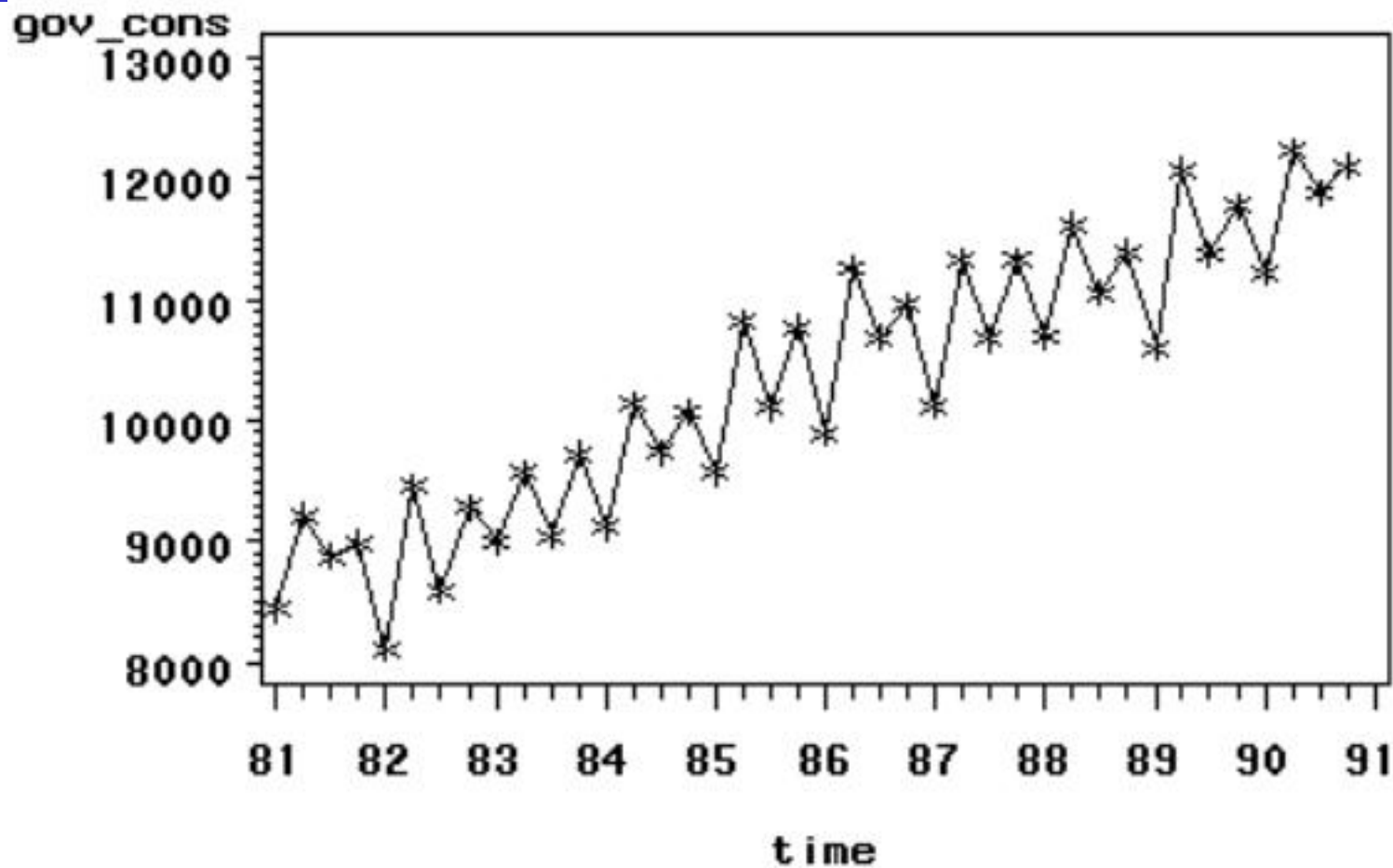


线性拟合

- 使用场合
 - 长期趋势呈现出线形特征
- 模型结构

$$\begin{cases} x_t = a + bt + I_t \\ E(I_t) = 0, \text{Var}(I_t) \end{cases}$$

例4.1:拟合澳大利亚政府1981— 1990年每季度的消费支出序列





线性拟合

- 模型

$$\begin{cases} x_t = a + bt + I_t & , t = 1, 2, \dots, 40 \\ E(I_t) = 0, \text{Var}(I_t) = \sigma^2 \end{cases}$$

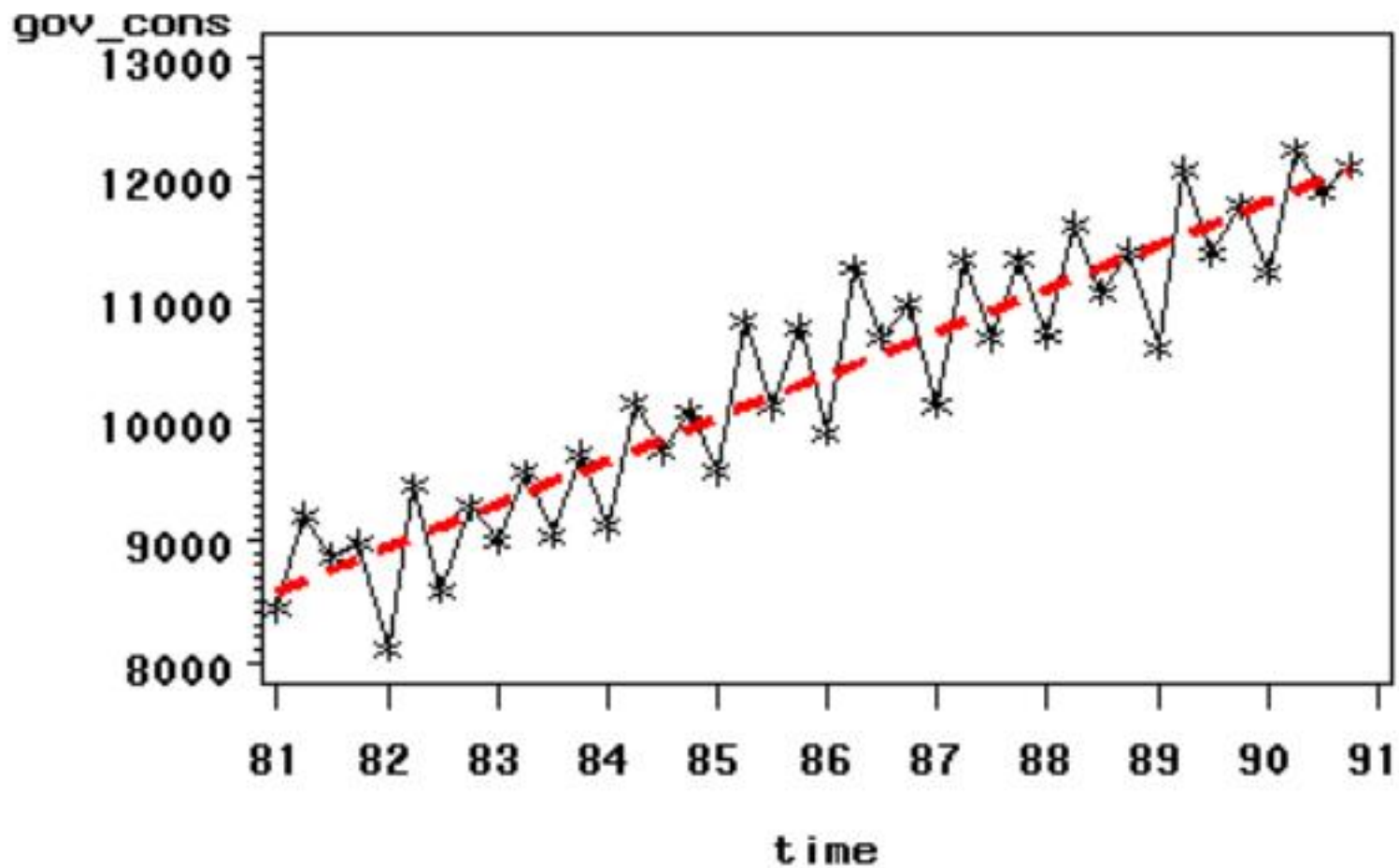
- 参数估计方法

- 最小二乘估计

- 参数估计值

$$\hat{a} = 8498.69 \quad , \quad \hat{b} = 89.12$$

拟合效果图





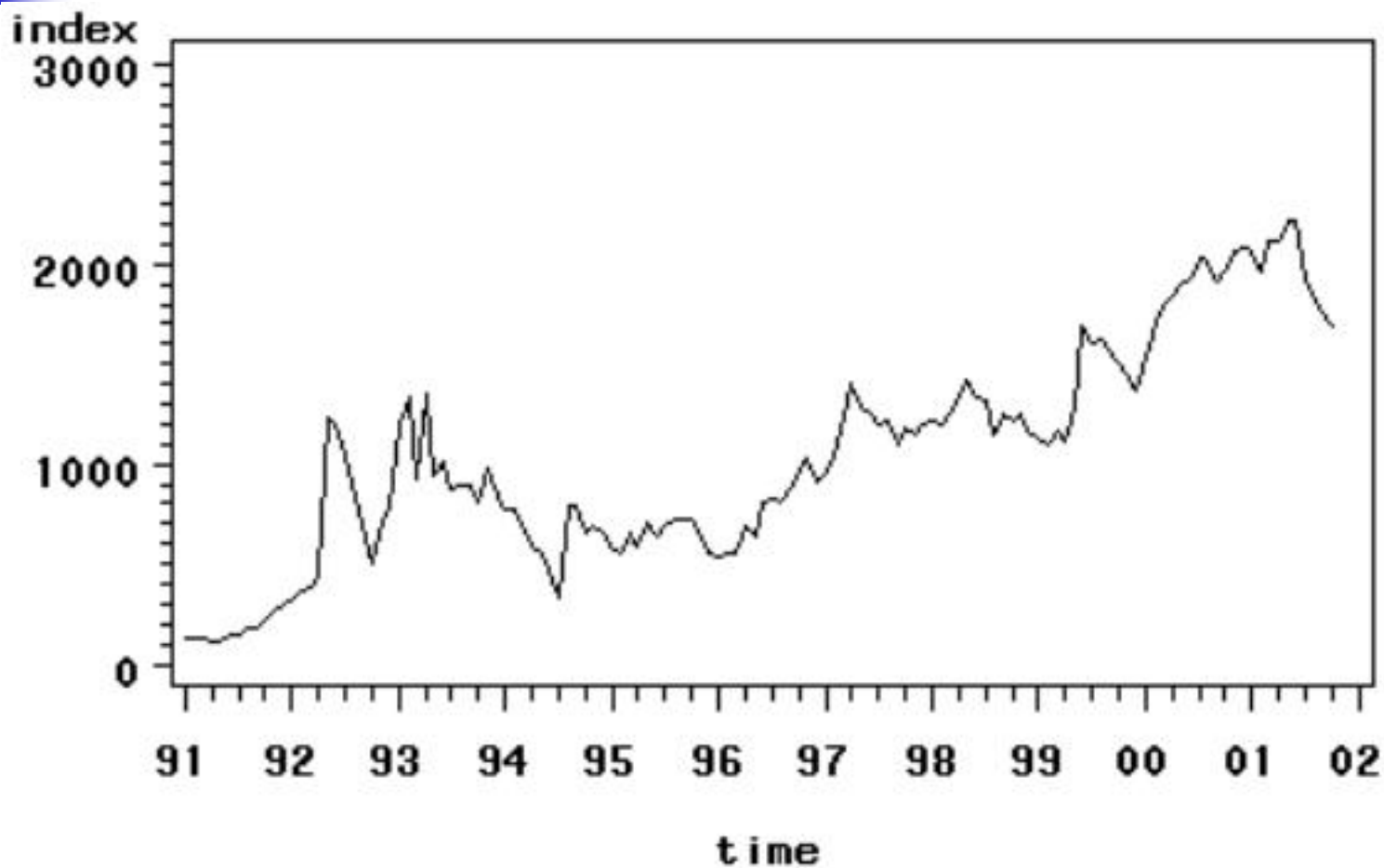
非线性拟合

- 使用场合
 - 长期趋势呈现出非线性特征
- 参数估计指导思想
 - 能转换成线性模型的都转换成线性模型，用线性最小二乘法进行参数估计
 - 实在不能转换成线性的，就用迭代法进行参数估计

常用非线性模型

模型	变换	变换后模型	参数估计方法
$T_t = a + bt + ct^2$	$t_2 = t^2$	$T_t = a + bt + ct_2$	线性最小二乘估计
$T_t = ab^t$	$T_t' = \ln T_t$ $a' = \ln a$ $b' = \ln b$	$T_t' = a' + b't$	线性最小二乘估计
$T_t = a + bc^t$	—	—	迭代法
$T_t = e^{a+bc^t}$	—	—	迭代法
$T_t = \frac{1}{a + bc^t}$	—	—	迭代法

例4.2: 对上海证券交易所每月末上证指数序列进行模型拟合





非线性拟合

- 模型

$$T_t = a + bt + ct^2$$

- 变换

$$t_2 = t^2$$

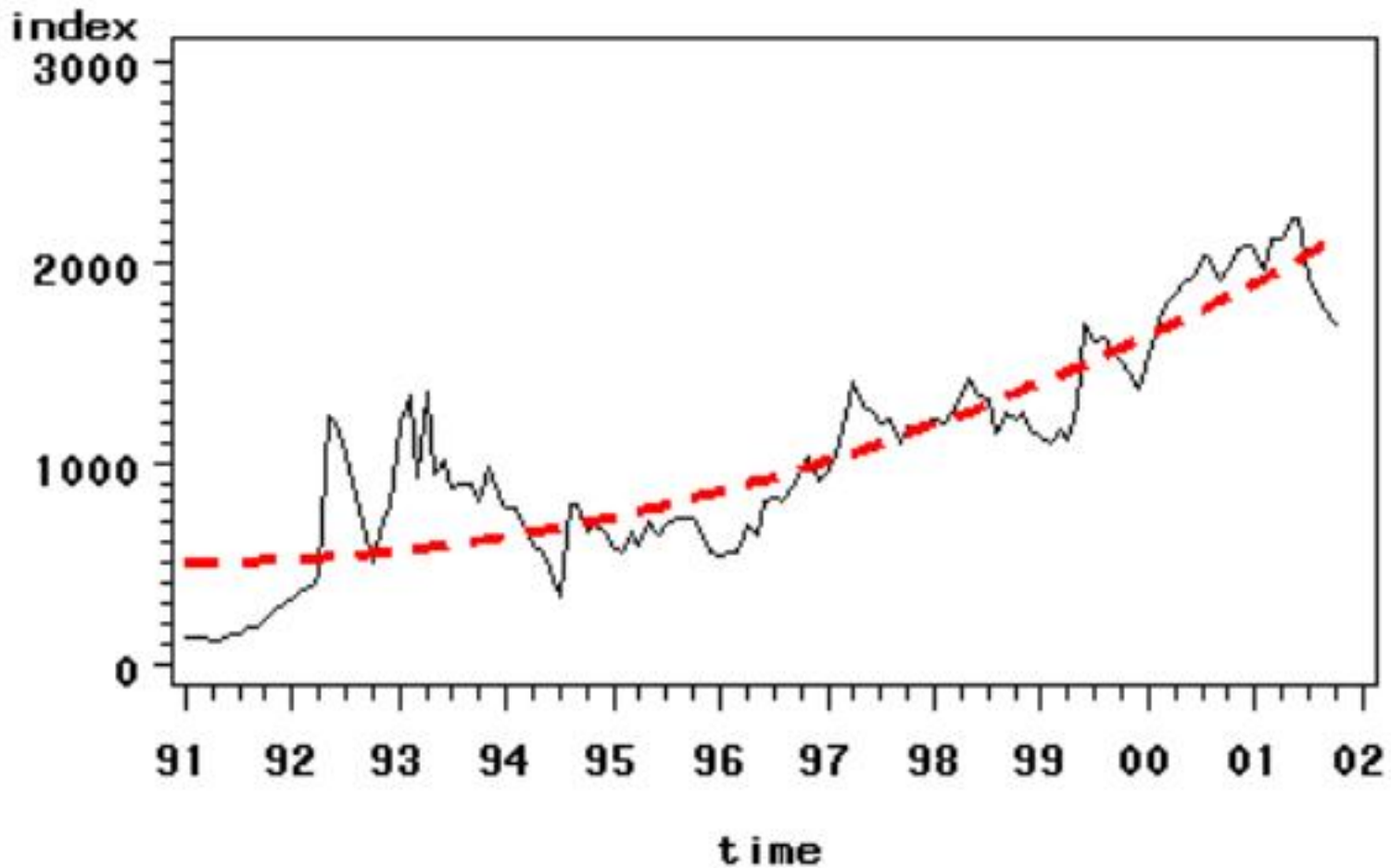
- 参数估计方法

- 线性最小二乘估计

- 拟合模型口径

$$T_t = 502.2517 + 0.0952t^2$$

拟合效果图





平滑法

- 平滑法是进行趋势分析和预测时常用的一种方法。它是利用修匀技术，削弱短期随机波动对序列的影响，使序列平滑化，从而显示出长期趋势变化的规律
- 常用平滑方法
 - 移动平均法
 - 指数平滑法



移动平均法

- 基本思想

- 假定在一个比较短的时间间隔里，序列值之间的差异主要是由随机波动造成的。根据这种假定，我们可以用一定时间间隔内的平均值作为某一期的估计值

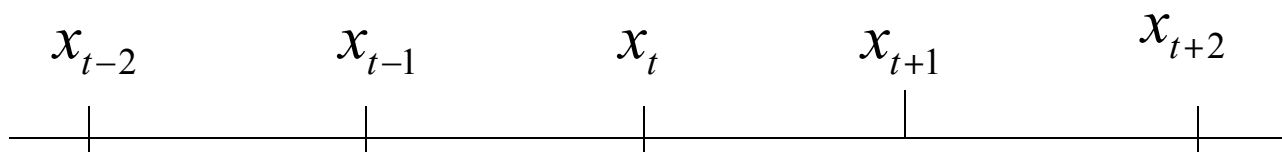
- 分类

- n 期中心移动平均
- n 期移动平均

n期中心移动平均

$$\tilde{x}_t = \begin{cases} \frac{1}{n} (x_{t-\frac{n-1}{2}} + x_{t-\frac{n-1}{2}+1} + \cdots + x_t + \cdots + x_{t+\frac{n-1}{2}-1} + x_{t+\frac{n-1}{2}}), & n \text{ 为奇数} \\ \frac{1}{n} (\frac{1}{2} x_{t-\frac{n}{2}} + x_{t-\frac{n}{2}+1} + \cdots + x_t + \cdots + x_{t+\frac{n}{2}-1} + \frac{1}{2} x_{t+\frac{n}{2}}), & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

5
期
中
心
移
动
平
均



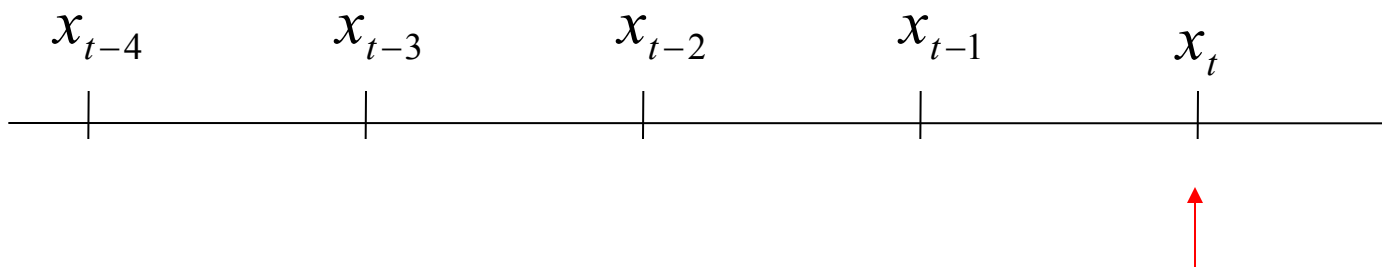
$$\tilde{x}_t = \frac{x_{t-2} + x_{t-1} + x_t + x_{t+1} + x_{t+2}}{5}$$



n期移动平均

$$\tilde{x}_t = \frac{1}{n} (x_t + x_{t-1} + \cdots + x_{t-n+1})$$

5
期
移
动
平
均



$$\tilde{x}_t = \frac{x_{t-4} + x_{t-3} + x_{t-2} + x_{t-1} + x_t}{5}$$



移动平均期数确定的原则

- 事件的发展有无周期性
 - 以周期长度作为移动平均的间隔长度，以消除周期效应的影响
- 对趋势平滑的要求
 - 移动平均的期数越多，拟合趋势越平滑
- 对趋势反映近期变化敏感程度的要求
 - 移动平均的期数越少，拟合趋势越敏感



移动平均预测

$$\hat{x}_{T+l} = \frac{1}{n} (x'_{T+l-1} + x'_{T+l-2} + \cdots + x'_{T+l-n})$$

$$x'_{T+l-i} = \begin{cases} \hat{x}_{T+l-i} & , l > i \\ x_{T+l-i} & , l \leq i \end{cases}$$



例4.3

- 某一观察值序列最后4期的观察值为：

5, 5.5, 5.8, 6.2

(1) 使用4期移动平均法预测 \hat{x}_{T+2} 。

(2) 求在二期预测值 \hat{x}_{T+2} 中 x_T 前面的系数等于多少？

例4.3解

$$(1) \hat{x}_{T+1} = \frac{1}{4}(x_T + x_{T-1} + x_{T-2} + x_{T-3}) = \frac{5 + 5.4 + 5.8 + 6.2}{4} = 5.6$$

$$\hat{x}_{T+2} = \frac{1}{4}(\hat{x}_{T+1} + x_T + x_{T-1} + x_{T-2}) = \frac{5.6 + 5 + 5.4 + 5.8}{4} = 5.45$$

$$(2) \hat{x}_{T+2} = \frac{1}{4}(\hat{x}_{T+1} + x_T + x_{T-1} + x_{T-2})$$
$$= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4}(x_T + x_{T-1} + x_{T-2} + x_{T-3}) + x_T + x_{T-1} + x_{T-2} \right]$$
$$= \frac{5}{16}(x_T + x_{T-1} + x_{T-2}) + \frac{1}{16}x_{T-3}$$

在二期预测值中 前面的系数等于 $\frac{5}{16}$



指数平滑法

- 指数平滑方法的基本思想
 - 在实际生活中，我们会发现对大多数随机事件而言，一般都是近期的结果对现在的影响会大些，远期的结果对现在的影响会小些。为了更好地反映这种影响作用，我们将考虑到时间间隔对事件发展的影响，各期权重随时间间隔的增大而呈指数衰减。这就是指数平滑法的基本思想
- 分类
 - 简单指数平滑
 - Holt两参数指数平滑



简单指数平滑

- 基本公式

$$\tilde{x}_t = ax_t + a(1-a)x_{t-1} + a(1-a)^2x_{t-2} + \dots$$

- 等价公式

$$\tilde{x}_t = ax_t + (1-a)\tilde{x}_{t-1}$$



经验确定

- 初始值的确定

$$\tilde{x}_0 = x_1$$

- 平滑系数的确定

- 一般对于变化缓慢的序列， α 常取较小的值
- 对于变化迅速的序列， α 常取较大的值
- 经验表明 α 的值介于0.05至0.3之间，修匀效果比较好。



简单指数平滑预测

- 一期预测值

$$\begin{aligned}\hat{x}_{T+1} &= \tilde{x}_T \\ &= \alpha x_T + \alpha(1-\alpha)x_{T-1} + \alpha(1-\alpha)^2 x_{T-2} + \cdots\end{aligned}$$

- 二期预测值

$$\begin{aligned}\hat{x}_{T+2} &= \alpha \hat{x}_{T+1} + \alpha(1-\alpha)x_T + \alpha(1-\alpha)^2 x_{T-1} + \cdots \\ &= \alpha \hat{x}_{T+1} + (1-\alpha)\hat{x}_{T+1} = \hat{x}_{T+1}\end{aligned}$$

- l 期预测值

$$\hat{x}_{T+l} = \hat{x}_{T+1}, \quad l \geq 2$$



例4.4

- 对某一观察值序列 $\{x_t\}$ 使用指数平滑法。
已知 $x_T = 10$, $\tilde{x}_{T-1} = 10.5$, 平滑系数 $\alpha = 0.25$
 - (1) 求二期预测值 \hat{x}_{T+2} 。
 - (2) 求在二期预测值 \hat{x}_{T+2} 中 x_T 前面的系数等于多少？



例4.4解

$$(1) \quad \hat{x}_{T+1} = \tilde{x}_T = 0.25x_T + 0.75\tilde{x}_{T-1} = 10.3$$

$$\hat{x}_{T+2} = \hat{x}_{T+1} = 10.3$$

$$(2) \quad \hat{x}_{T+2} = \hat{x}_{T+1} = ax_T + a(1-a)x_{T-1} + \dots$$

所以使用简单指数平滑法二期预测值中 x_T 前面的系数就等于平滑系数 $a = 0.25$



Holt两参数指数平滑

- 使用场合

- 适用于对含有线性趋势的序列进行修匀

- 构造思想

- 假定序列有一个比较固定的线性趋势

$$\hat{x}_t = x_{t-1} + r$$

- 两参数修匀

$$\begin{cases} \tilde{x}_t = \alpha x_t + (1 - \alpha)(\tilde{x}_{t-1} + r_{t-1}) \\ r_t = \gamma(\tilde{x}_t - \tilde{x}_{t-1}) + (1 - \gamma)r_{t-1} \end{cases}$$



初始值的确定

- 平滑序列的初始值

$$\tilde{x}_0 = x_1$$

- 趋势序列的初始值

$$r_0 = \frac{x_{n+1} - x_1}{n}$$



Holt两参数指数平滑预测

- l 期预测值

$$\hat{x}_{T+l} = \tilde{x}_T + l \cdot r_T$$



例4.5

- 对北京市1978——2000年报纸发行量序列进行Holt两参数指数平滑。指定

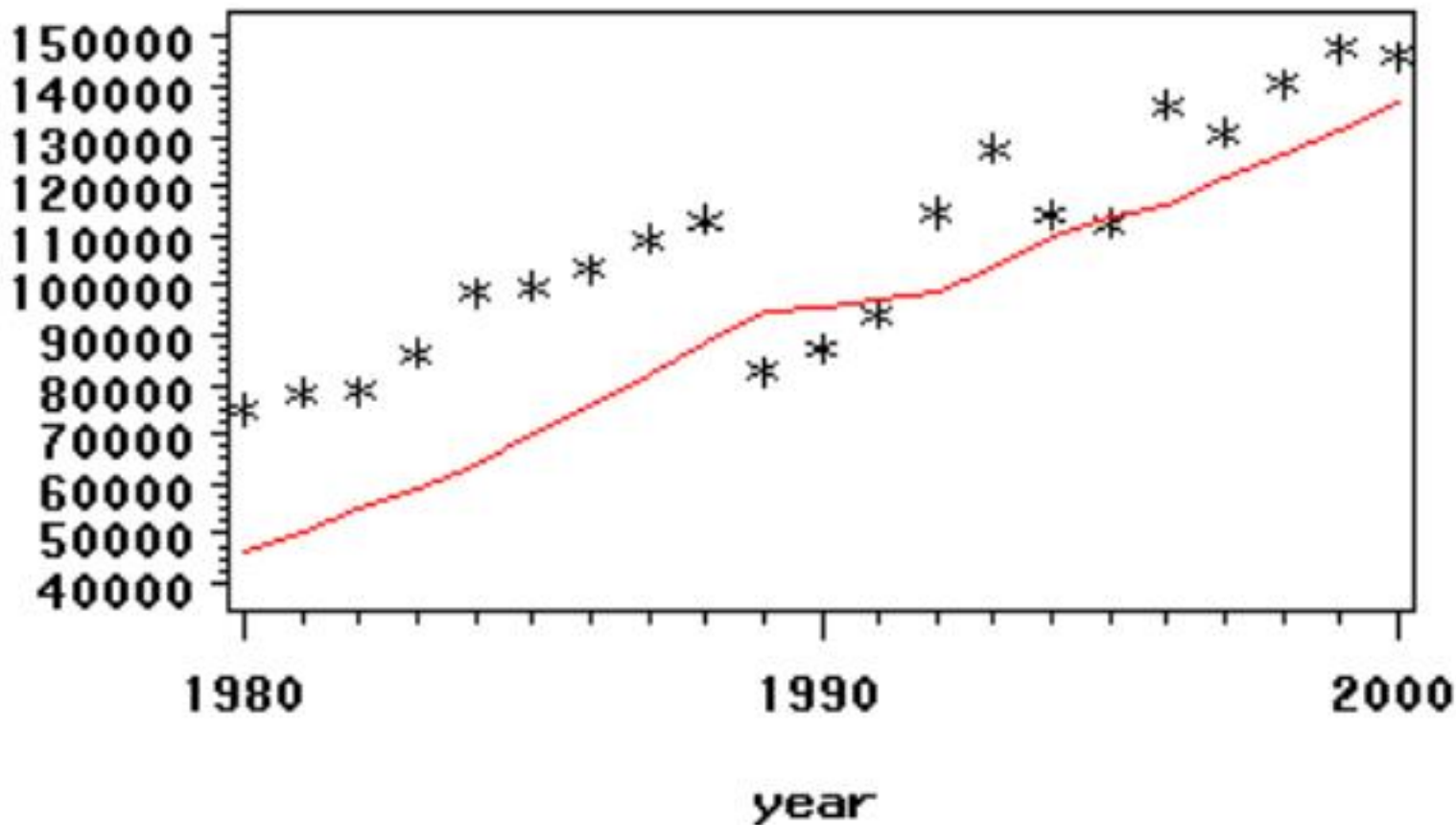
$$\tilde{x}_0 = x_1 = 51259$$

$$r_0 = \frac{x_{23} - x_1}{23} = 4325$$

$$a = 0.15$$

$$\gamma = 0.1$$

例4.5平滑效果图

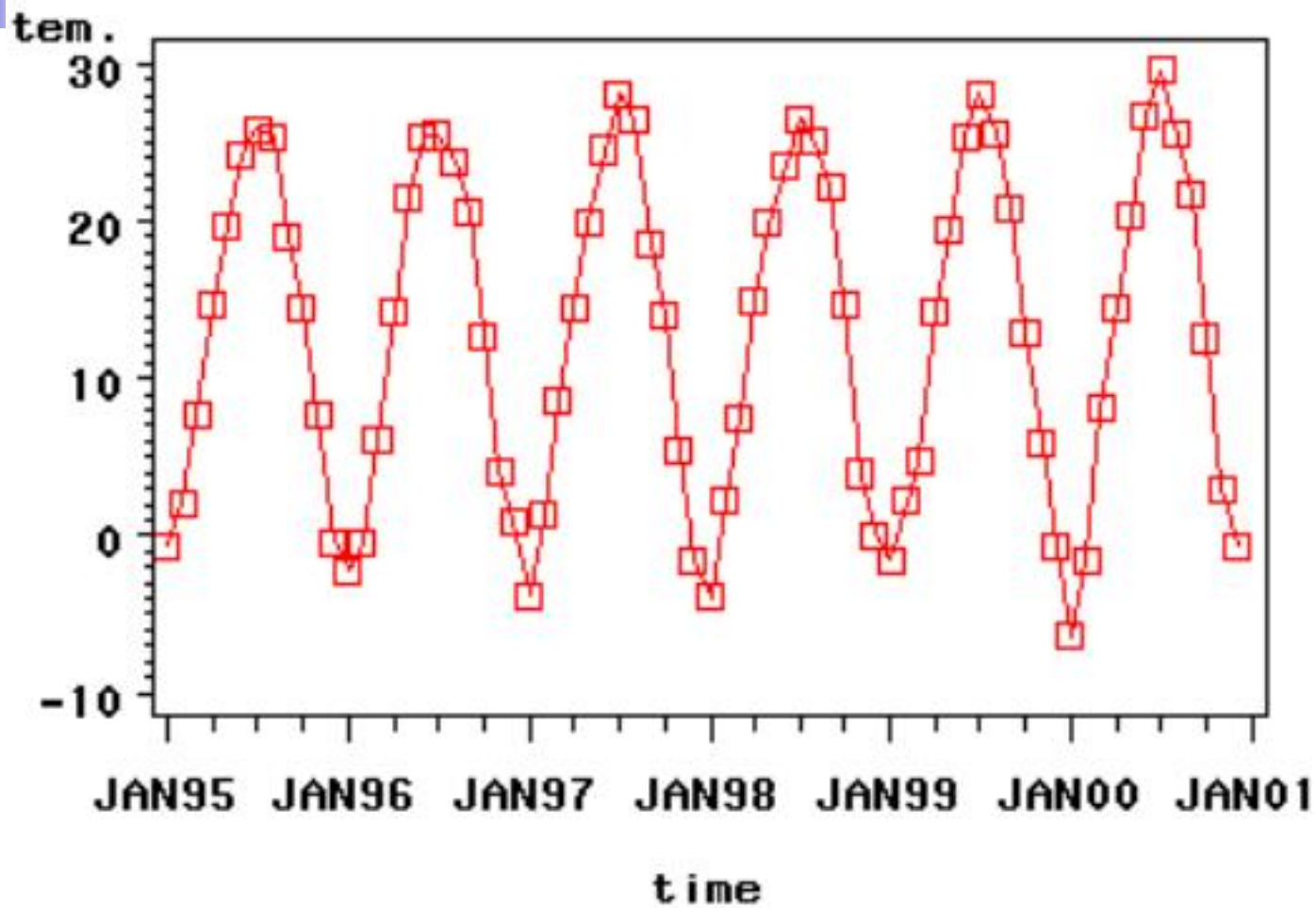




4.3 季节效应分析

【例4.6】 以北京市1995年——2000年月平均气温序列为例，介绍季节效应分析的基本思想和具体操作步骤。

时序图





季节指数

- 季节指数的概念
 - 所谓季节指数就是用简单平均法计算的周期内各时期季节性影响的相对数
- 季节模型

$$x_{ij} = \bar{x} \cdot S_j + I_{ij}$$



季节指数的计算

- 计算周期内各期平均数

$$\bar{x}_k = \frac{\sum_{i=1}^n x_{ik}}{n}, k = 1, 2, \dots, m$$

- 计算总平均数

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m x_{ik}}{nm}$$

- 计算季节指数

$$S_k = \frac{\bar{x}_k}{\bar{x}}, k = 1, 2, \dots, m$$



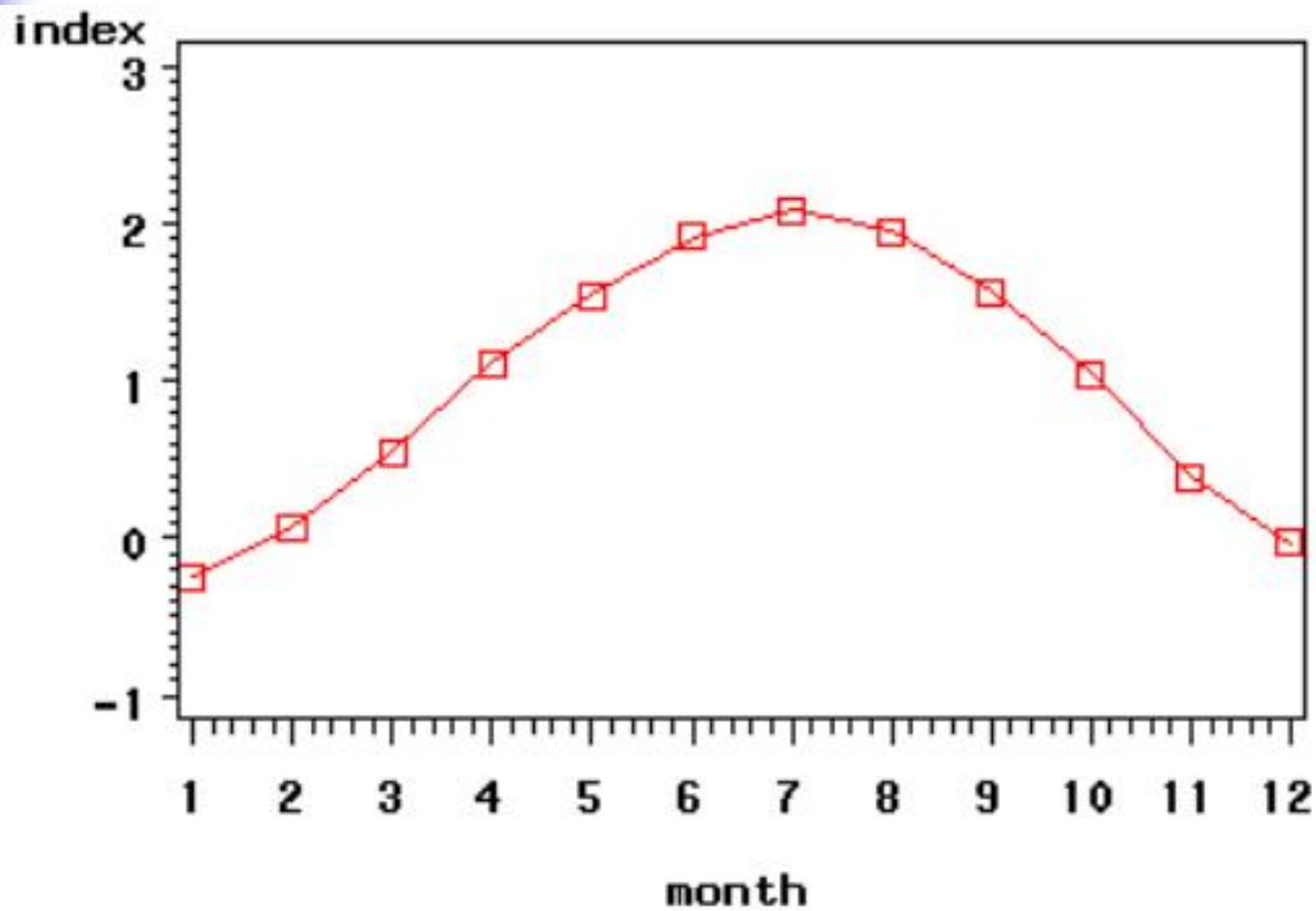
季节指数的理解

- 季节指数反映了该季度与总平均值之间的一种比较稳定的关系
- 如果这个比值大于1，就说明该季度的值常常会高于总平均值
- 如果这个比值小于1，就说明该季度的值常常低于总平均值
- 如果序列的季节指数都近似等于1，那就说明该序列没有明显的季节效应

例4.6 季节指数的计算

年 月	平均气温 (°C)						月平均	季节指数
	1995	1996	1997	1998	1999	2000	\bar{x}_i	S_i
1	-0.7	-2.2	-3.8	-3.9	-1.6	-6.4	-3.10	-0.238
2	2.1	-0.4	1.3	2.4	2.2	-1.5	1.02	0.078
3	7.7	6.2	8.7	7.6	4.8	8.1	7.18	0.551
4	14.7	14.3	14.5	15.0	14.4	14.6	14.58	1.119
5	19.8	21.6	20.0	19.9	19.5	20.4	20.20	1.550
6	24.3	25.4	24.6	23.6	25.4	26.7	25.00	1.919
7	25.9	25.5	28.2	26.5	28.1	29.6	27.30	2.095
8	25.4	23.9	26.6	25.1	25.6	25.7	25.38	1.948
9	19.0	20.7	18.6	22.2	20.9	21.8	20.53	1.576
10	14.5	12.8	14.0	14.8	13.0	12.6	13.62	1.045
11	7.7	4.2	5.4	4.0	5.9	3.0	5.03	0.386
12	-0.4	0.9	-1.5	0.1	-0.6	-0.6	-0.35	-0.027
总平均 $\bar{x} = 13.03$								

例4.6 季节指数图





综合分析

- 常用综合分析模型

- 加法模型

$$x_t = T_t + S_t + I_t$$

- 乘法模型

$$x_t = T_t \cdot S_t \cdot I_t$$

- 混合模型

- a) $x_t = S_t \cdot T_t + I_t$

- b) $x_t = S_t \cdot (T_t + I_t)$

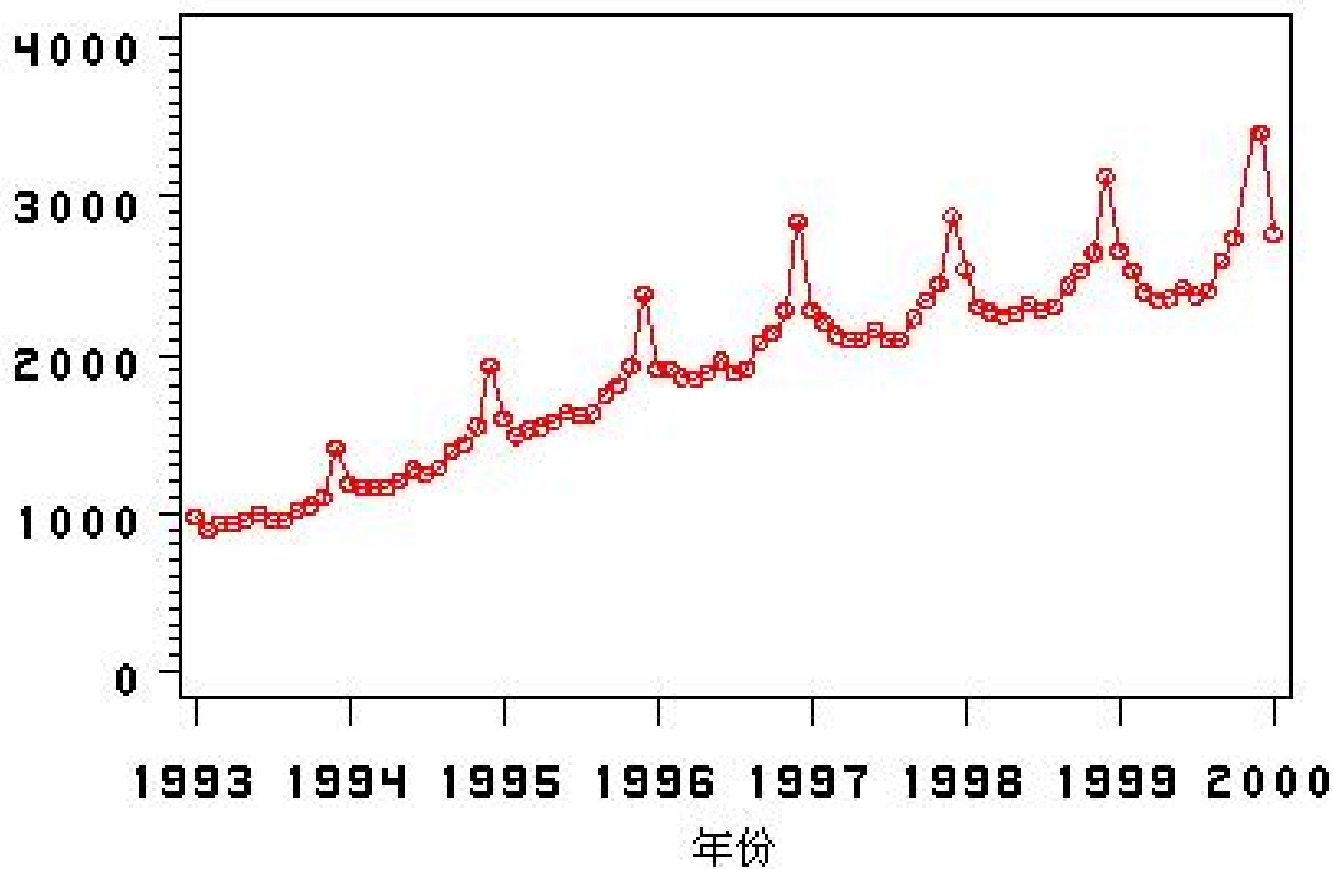


例4.7

- 对1993年——2000年中国社会消费品零售总额序列（数据见附录1.11）进行确定性时序分析。

(1) 绘制时序图

社会消费品零售总额 (亿)





(2)选择拟合模型

- 长期递增趋势和以年为固定周期的季节波动同时作用于该序列，因而尝试使用混合模型 (b) 拟合该序列的发展

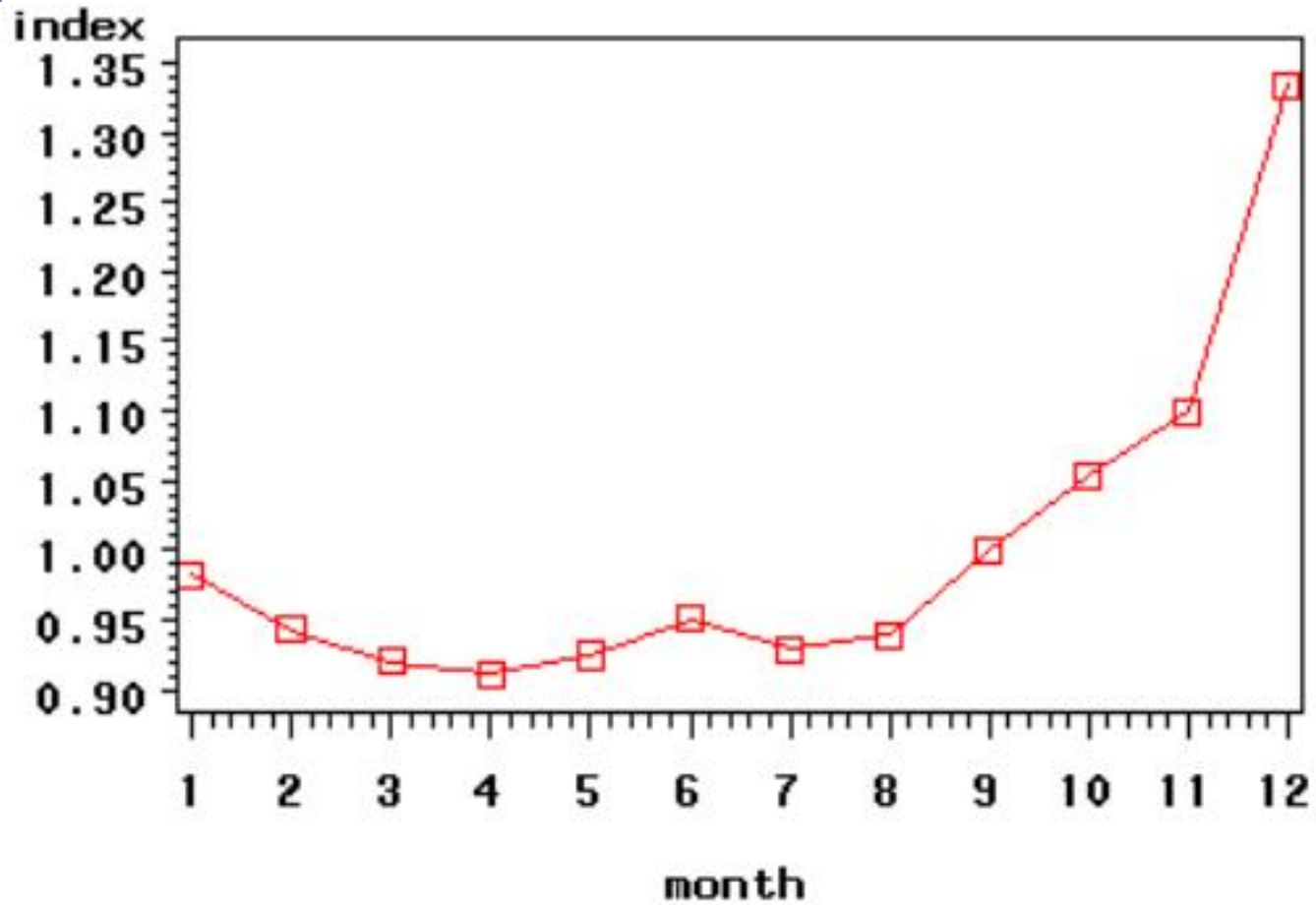
$$x_t = S_t \cdot (T_t + I_t)$$



(3) 计算季节指数

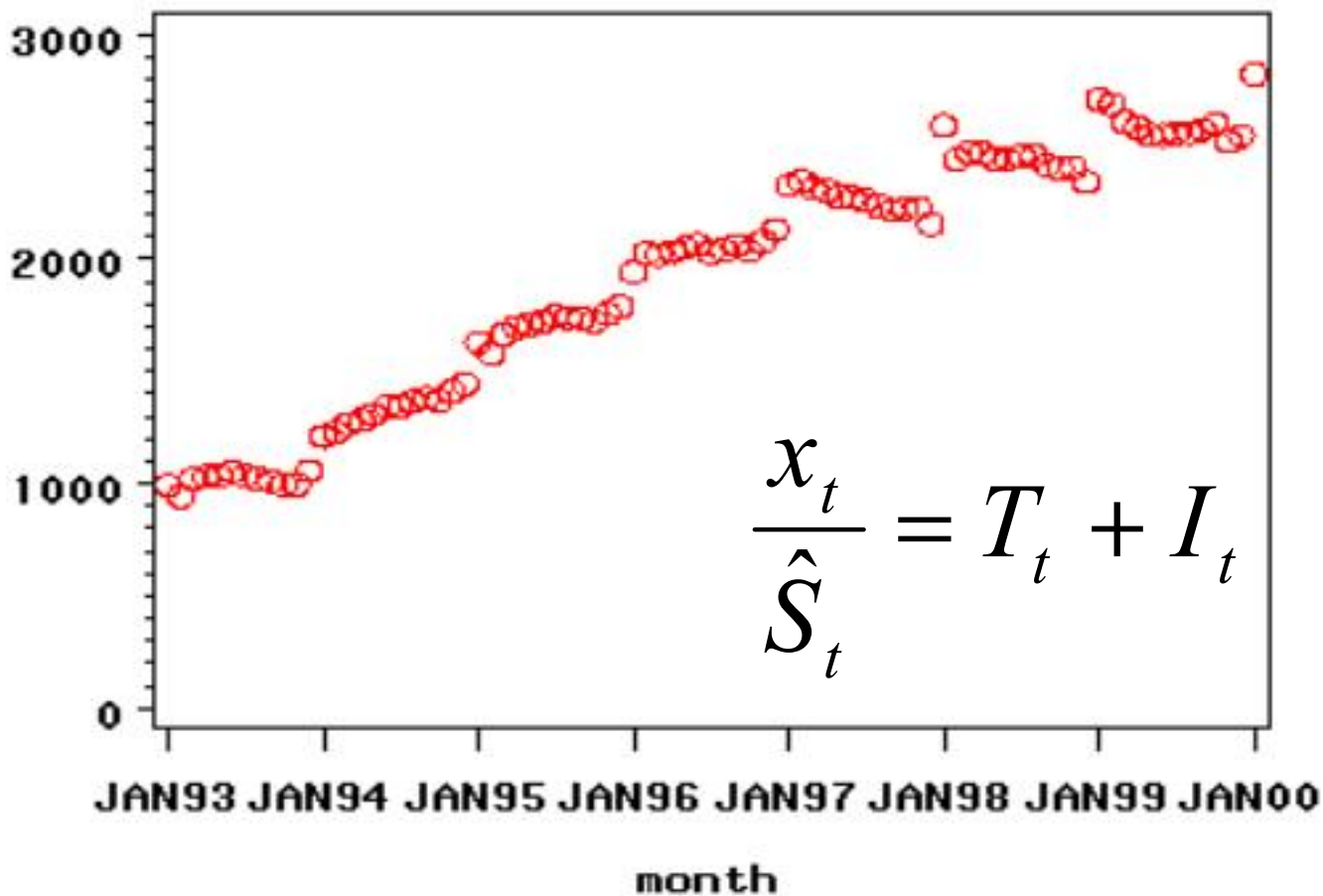
月份	季节指数	月份	季节指数
1	0.982	7	0.929
2	0.943	8	0.940
3	0.920	9	1.001
4	0.911	10	1.054
5	0.925	11	1.100
6	0.951	12	1.335

季节指数图



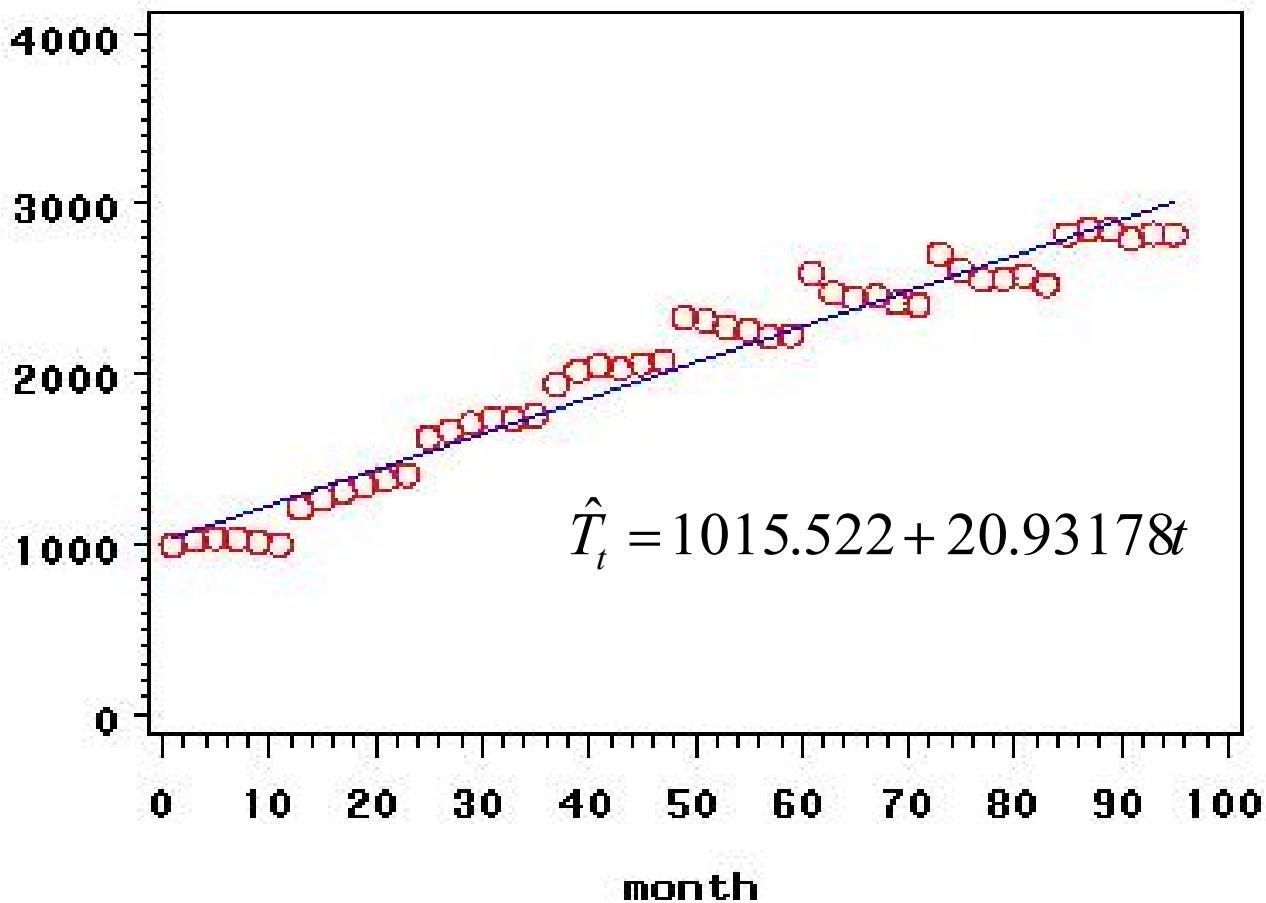
季节调整后的序列图

消除季节影响之后的社会商品零售总额

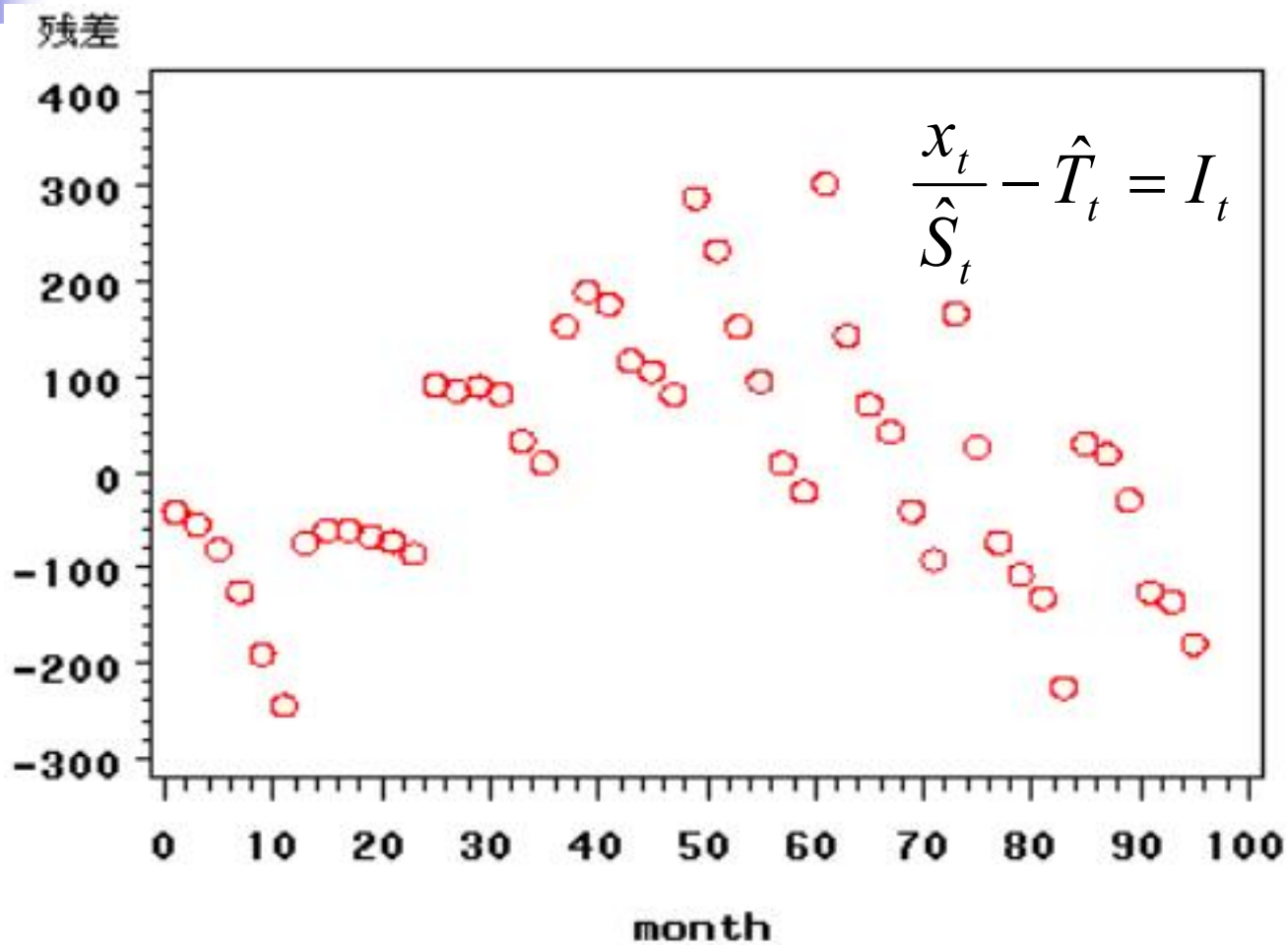


(4) 拟合长期趋势

趋势拟合

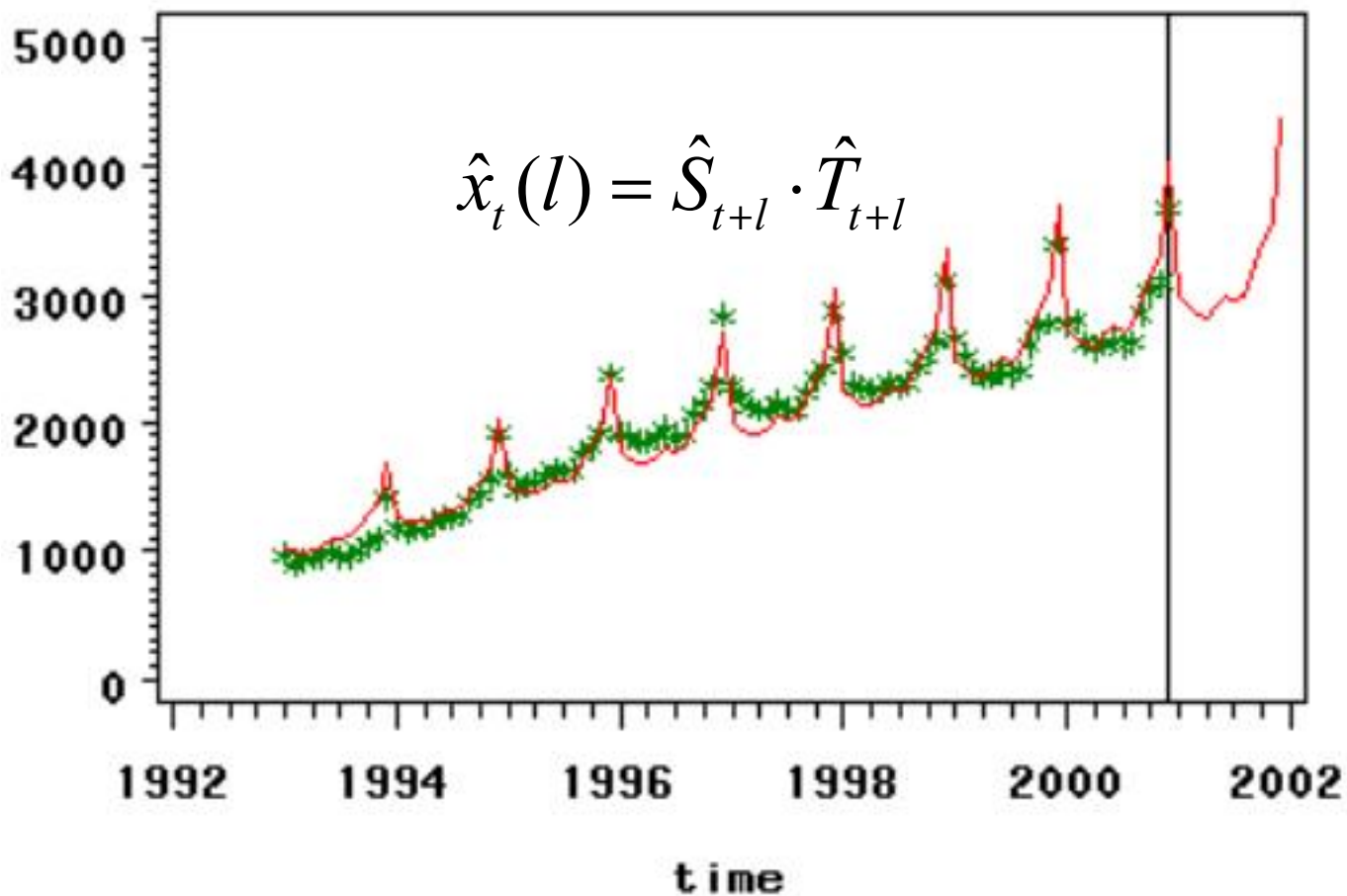


(5) 残差检验



(6) 短期预测

社会商品零售总额





X-11过程

- 简介

- X-11过程是美国国情调查局编制的时间序列季节调整过程。它的基本原理就是时间序列的确定性因素分解方法

- 因素分解

- 长期趋势起伏
- 季节波动
- 不规则波动
- 交易日影响

- 模型

- 加法模型
- 乘法模型



方法特色

- 普遍采用移动平均的方法
 - 用多次短期中心移动平均消除随机波动
 - 用周期移动平均消除趋势
 - 用交易周期移动平均消除交易日影响

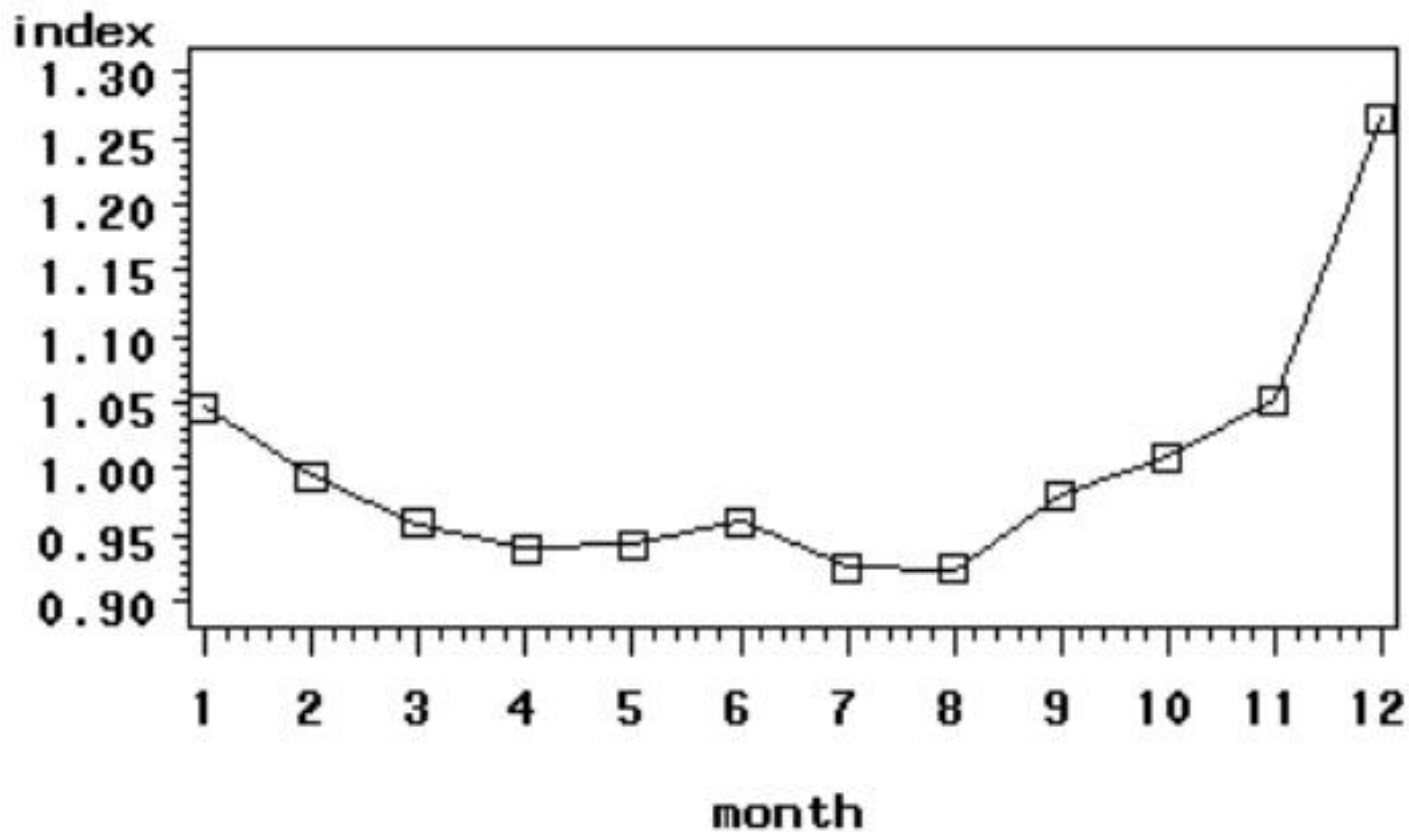


例4.7续

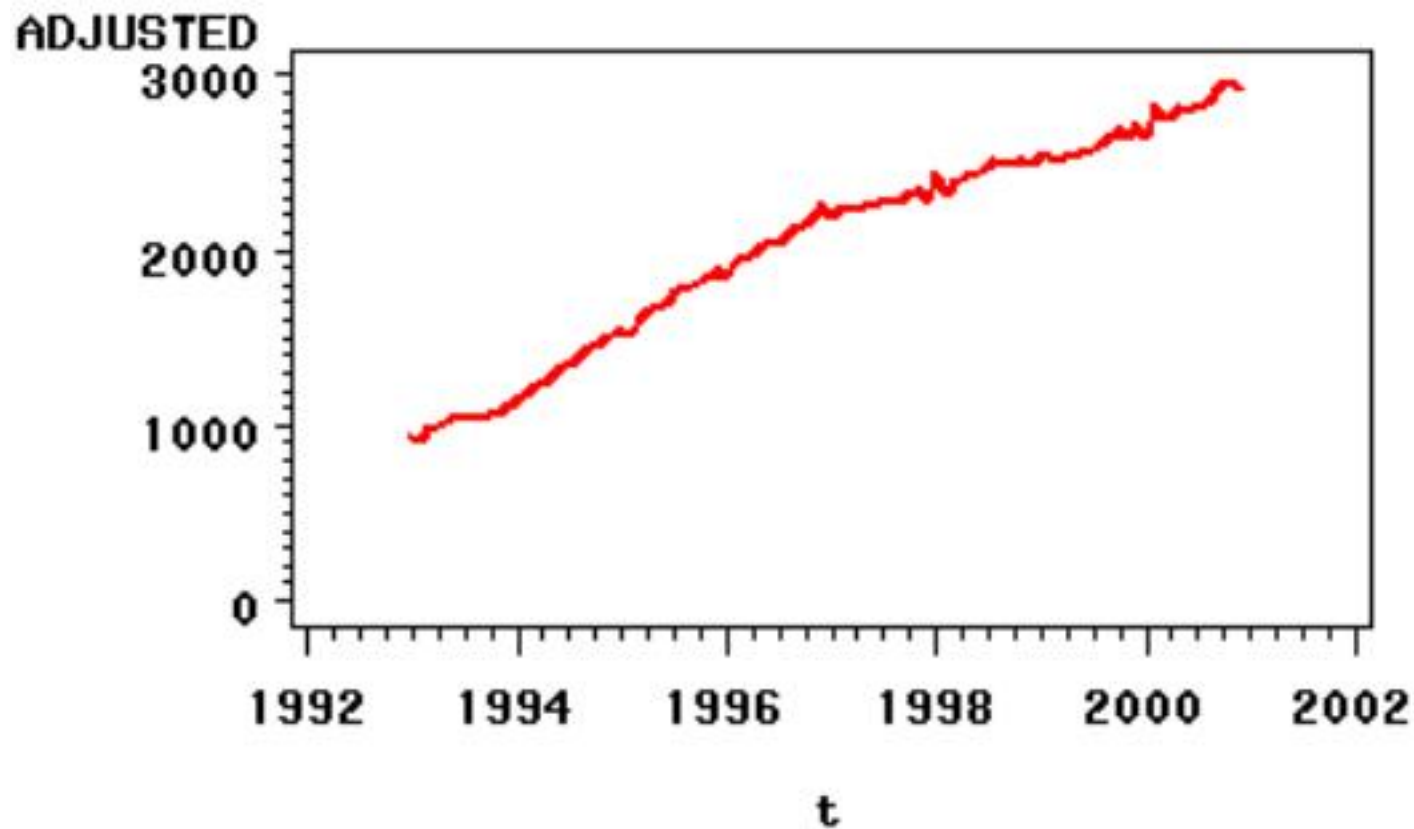
- 对1993年——2000年中国社会消费品零售总额序列使用X-11过程进行季节调整
- 选择模型（无交易日影响）

$$x_t = T_t S_t I_t$$

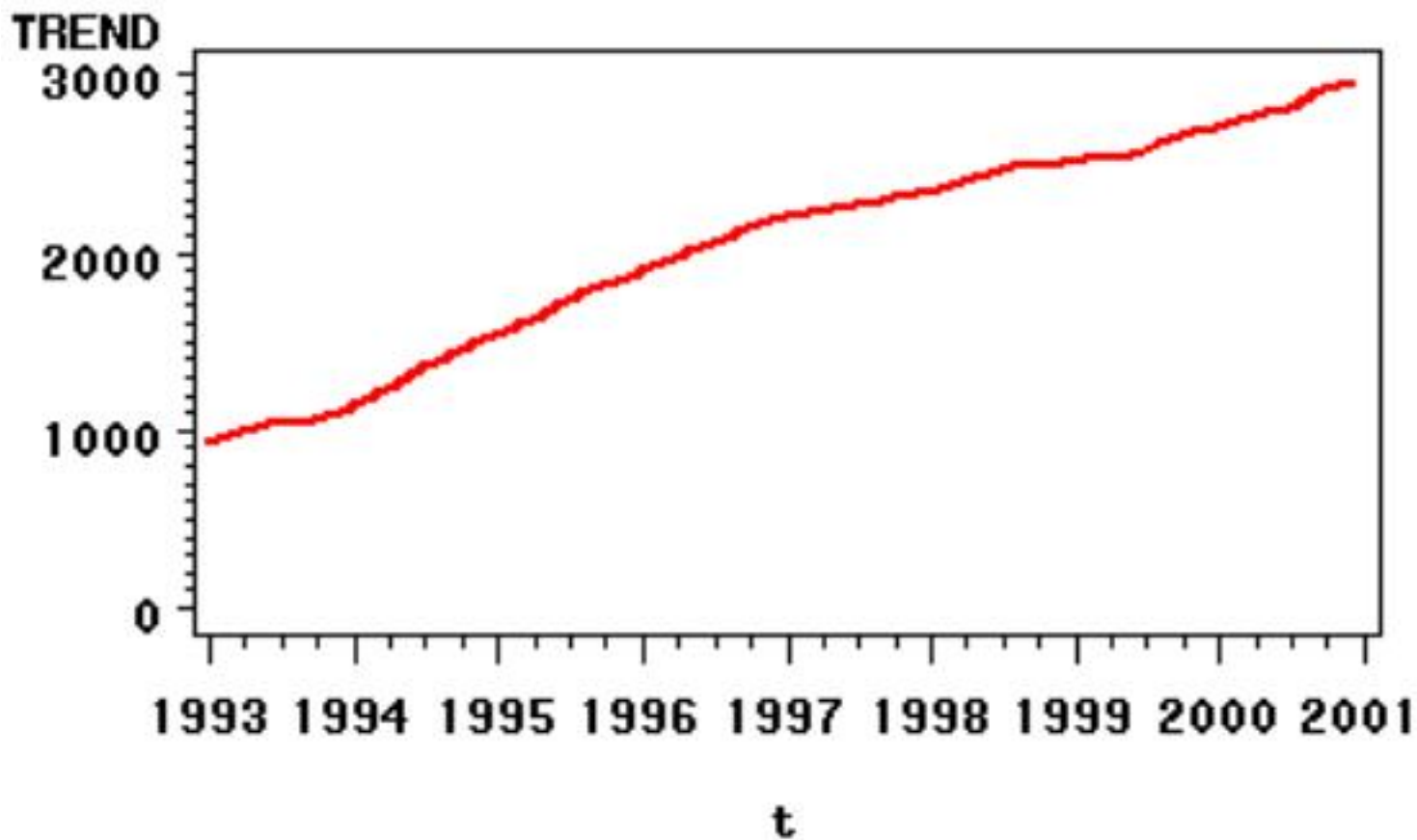
X11过程获得的季节指数图



季节调整后的序列图



趋势拟合图



随机波动序列图

